La sucesión de Fibonacci

Es aquella que comienza con dos unos y los restantes términos se calculan, en cada caso, sumando los dos anteriores. Es decir

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

La definición recursiva sería $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

La definición recursiva no permite obtener, por ejemplo, el término a_{50} más que calculando los 49 términos anteriores. Busquemos una definición cerrada.

Puesto que cada término se expresa en función de los dos anteriores, pongamos las relaciones dos a dos entre a_{n+1}, a_n y a_{n-1} y pongámosla en forma matricial:

$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$. Si llamamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A \cdot A \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A \cdot A \cdot A \cdot \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} = \ldots = A \cdot A \cdot \overset{n}{\ldots} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} a_{n-(n-1)} \\ a_{n-n} \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

considerando $a_0 = 0$, lo cual es perfectamente coherente con la sucesión y nos permite ajustar mejor los índices que si tenemos que quedarnos en $A^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = A^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

La dificultad radica en encontrar una fórmula general para A^n (calcular las sucesivas potencias de A es precisamente calcular la sucesión de Fibonacci). Para ello, el Álgebra lineal pone a nuestra disposición la llamada *Forma Canónica de Jordan*, que consiste en expresar $A = M \cdot D \cdot M^{-1}$ donde D es una matriz diagonal. Los elementos de esta diagonal son los llamados valores propios de A que son las raíces del llamado polinomio característico que es $|A - x.I|$. En nuestro caso, el polinomio característico es $|A - x.I| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = -x + x^2 - 1$, que es precisamente el polinomio que resulta al calcular la proporción de la sección áurea y tiene, por tanto raíces, $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ que llamaremos φ y $\overline{\varphi}$ (el número áureo y su conjugado)

Sin entrar en más detalles sobre los cálculos, podemos expresar la matriz A como

$$A = M\cdot D\cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\varphi} & \frac{\varphi}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \overline{\varphi} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\varphi}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\varphi} & 1 \end{pmatrix}$$

(todo lo anterior queda sin justificar pero el resultado es comprobable: basta hacer los dos productos, para lo que resulta cómodo tener en cuenta que $\varphi.\overline{\varphi} = -1$ y que $\varphi + \overline{\varphi} = 1$ como se puede comprobar con un cálculo directo o teniendo en cuenta que son las raíces del polinomio anterior.

¿Y para qué esta manera tan rebuscada de expresar la matriz A?

Pues porque queríamos calcular A^n y ahora

$$A^n = \left(M.D.M^{-1}\right)^n = M.D.\cancel{M^{-1}}.\cancel{M}.D.\cancel{M^{-1}}.\cancel{M}.D.M^{-1}\ldots M.D.M^{-1} = M.D.D.D\ldots D.M^{-1} = M.D^n.M^{-1}$$

y (como es fácil de comprobar) para elevar una matriz diagonal a una potencia, basta con elevar a la potencia cada uno de sus elementos.

De esta manera

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\varphi} & \frac{\varphi}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \overline{\varphi}^n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\varphi}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\varphi} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\varphi} & \frac{\varphi}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\varphi^{n+1}}{\sqrt{5}} & \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \\ \frac{-\overline{\varphi}^n}{\varphi} & \overline{\varphi}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\varphi^{n+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\overline{\varphi}^n}{\sqrt{5}\varphi} & \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\overline{\varphi}^n}{\sqrt{5}} \\ \frac{\varphi^n - \overline{\varphi}^n}{\sqrt{5}} & \frac{\varphi^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi.\overline{\varphi}^n}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}} & \frac{\varphi^n - \overline{\varphi}^n}{\sqrt{5}} \\ \frac{\varphi^n - \overline{\varphi}^n}{\sqrt{5}} & \frac{\varphi^{n-1} - \overline{\varphi}^{n-1}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$ y así, $$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^n\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}} & \frac{\varphi^n - \overline{\varphi}^n}{\sqrt{5}} \\ \frac{\varphi^n - \overline{\varphi}^n}{\sqrt{5}} & \frac{\varphi^{n-1} - \overline{\varphi}^{n-1}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$, con lo que concluímos (fijándonos en la segunda fila de las matrices anteriores) que

$$\boxed{a_n = \frac{\varphi^n - \overline{\varphi}^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}$$